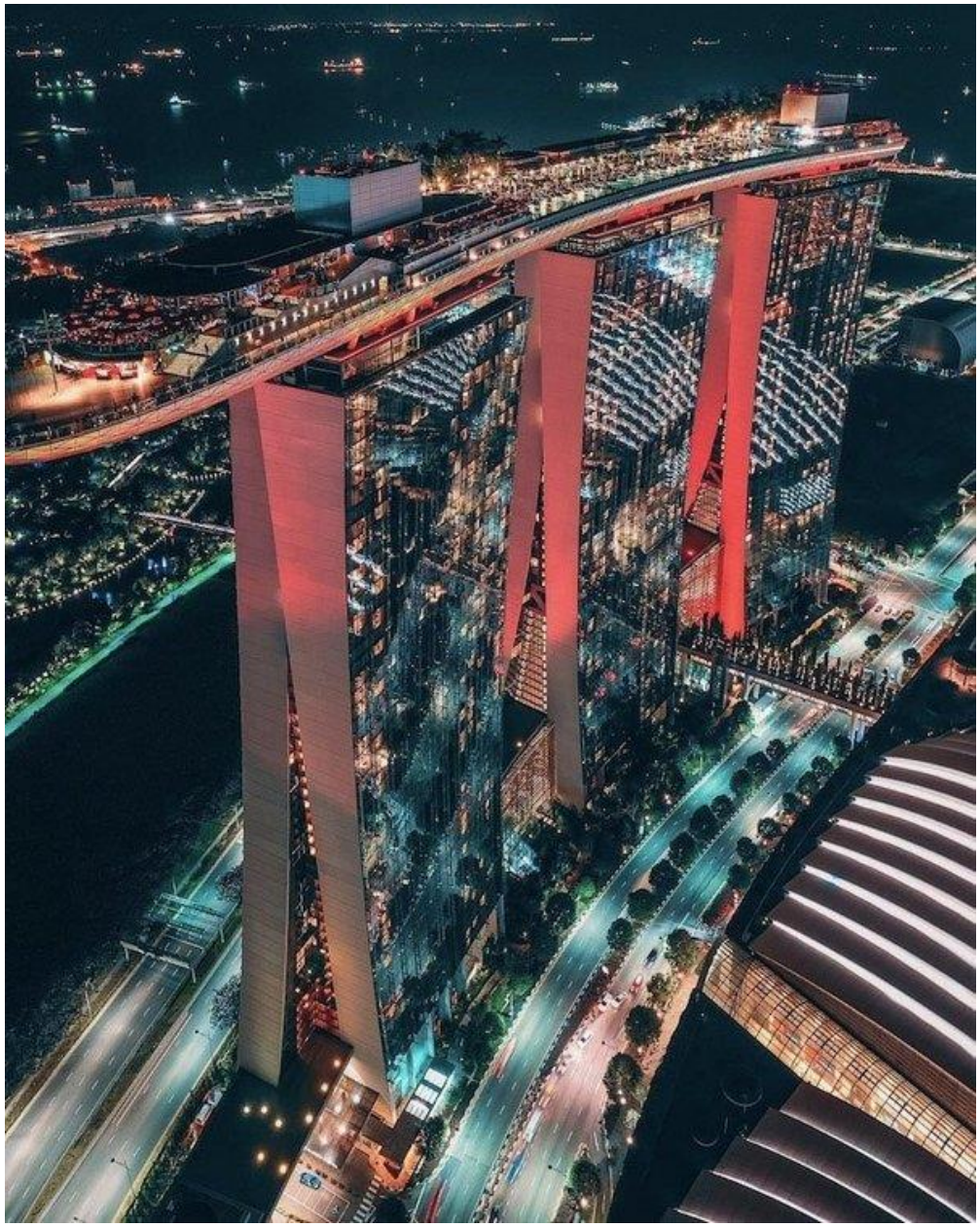


مقاومة المواد وحساب الانشاءات 1

Sem. 1

2024-2025

أ.د. نايل محمد حسن

جَـامعة
المَـنارة
MANARA UNIVERSITY

المحاضرة الرابعة

عزوم القوى والمزدوجات

Moment of a Force

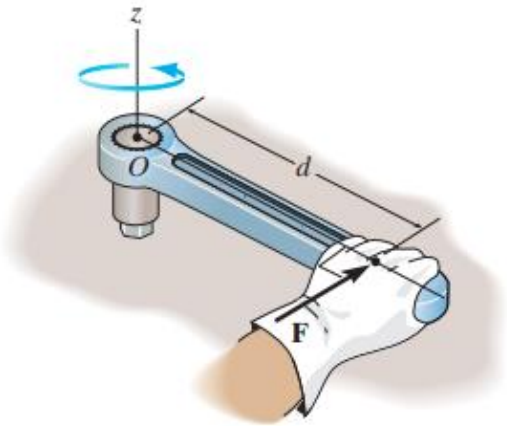
Moment of a Couple

عزم القوة

عندما تؤثر قوة على جسم ما فإنها تسعى لتدوير الجسم حول نقطة ليست على خط تأثير القوة ويسمى هذا التأثير بالعزم. نميز بين نوعين

يسمى هذا السعي للدوران ب"عزم الفتل" (الالتواء) Torque، وفي اغلب الاحيان يسمى عزم القوة أو ببساطة "العزم".

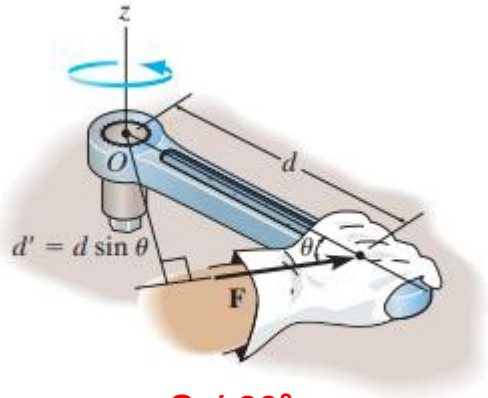
لاحظ تأثير العزم في الاشكال التالية:



(a)

العزم متناسب مع القوة F والذراع d

$\Theta = 90^0$

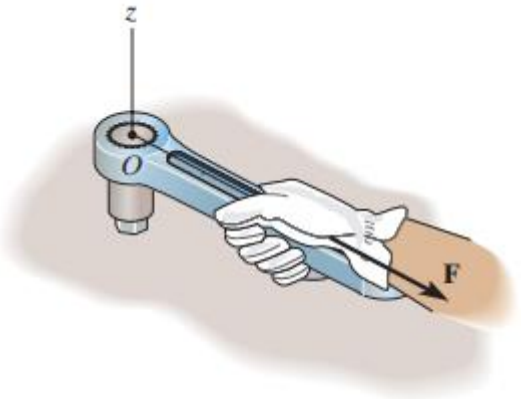


(b)

$\Theta \neq 90^0$

$d' = d \sin\theta$

العزم اصغر



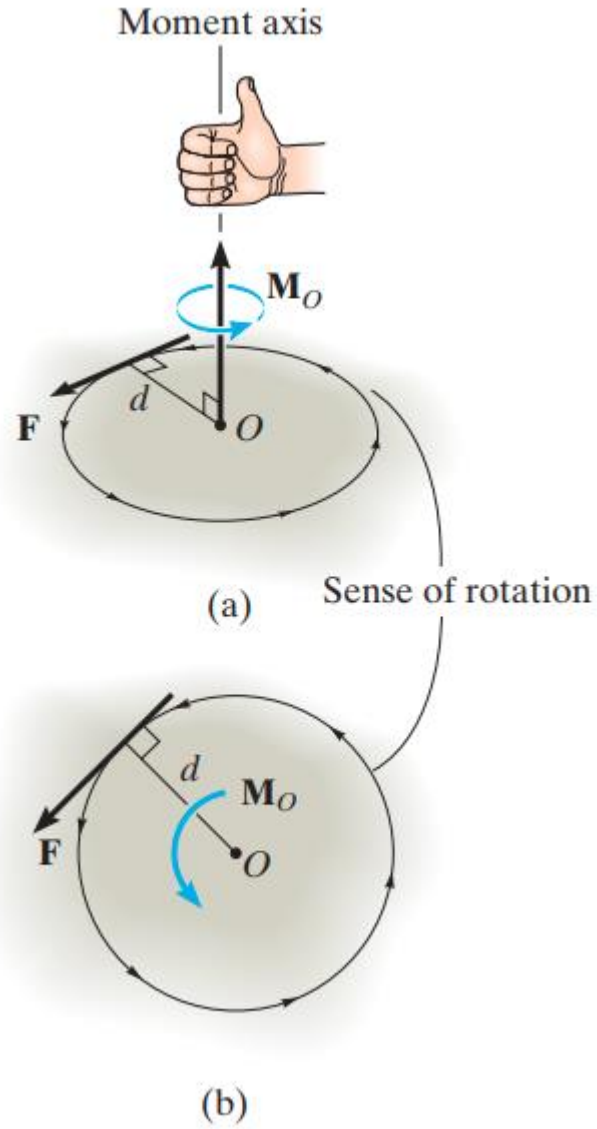
(c)

$\Theta = 0$ ، $d = 0$

خط تأثير القوة يمر من O (المحور Z)

العزم حول o معدوم وبالتالي لايوجد دوران

عزم القوة



باعتبار القوة F توثر في المستوي المظلل والنقطة o تقع على المستوي فإن عزم القوة حول النقطة o (M_O)، أو حول محور عمودي على المستوى يمر من o هي مقدار متجه (شعاعي) (يملك قيمة واتجاه).

شدة (مقدار) العزم:

$$M_O = Fd$$

d:الذراع،المسافة العمودية والنقطة o.

واحدات العزم (قوة. طول) مثلا N.m

الاتجاه: يحدد بواسطة محور الدوران

تستخدم قاعدة اليد اليمنى لتحديد جهة الدوران

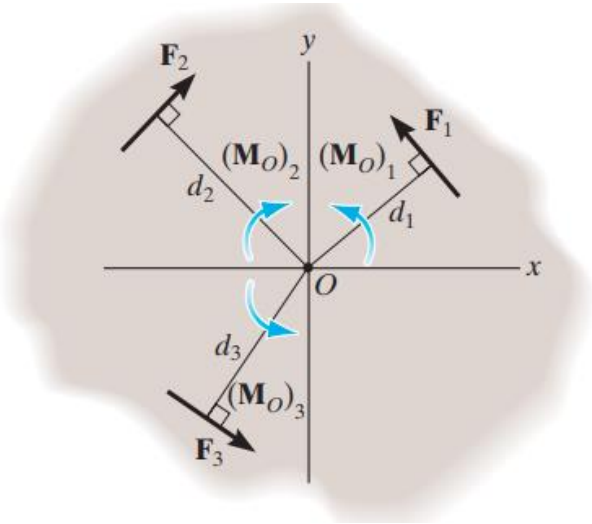
(حيث يمكن تمثيل العزم بشعاع مزدوج الرأس)

العزم المحصل (محصلة العزوم)

في المسائل ثنائية الابعاد (المستوية) حيث كل القوى في المستوي xy، يمكن تحديد العزم المحصل $(MR)_o$ حول النقطة o (المحور z) كمجموع جبري لكل العزوم التي تشكلها القوى في النظام.

اصطلاحا: سنعتبر العزم الموجب يدور عكس عقارب الساعة طالما هي متجهة على طول المحور الموجب z، خارج اللوحة.

العزوم المتجهة مع عقارب الساعة تعتبر سالبة.



بناء على ذلك تكون قيمة العزم المحصل من الشكل

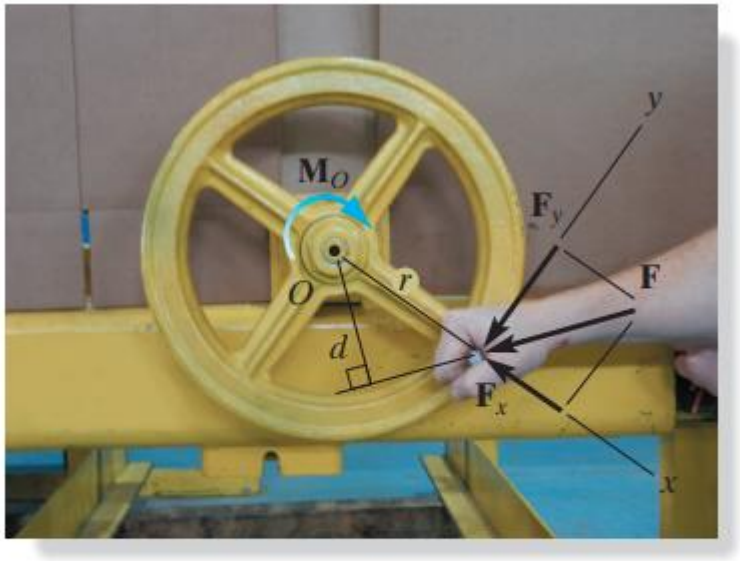
$$\circlearrowleft +(M_R)_O = \Sigma Fd; \qquad (M_R)_O = F_1d_1 - F_2d_2 + F_3d_3$$

اذا كان العزم المحصل موجب، تكون جهة دوران العزم عكس عقارب الساعة (خارج الورقة)

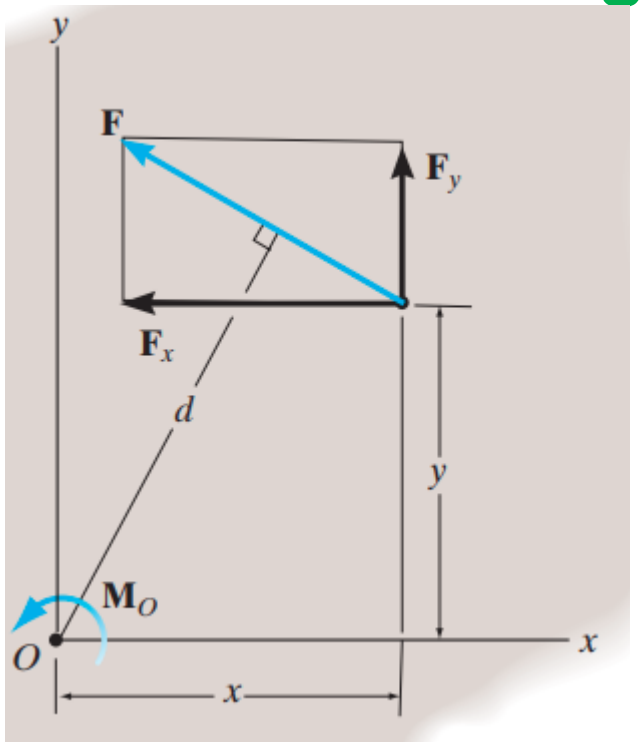
اذا كان العزم المحصل سالب، تكون جهة دوران العزم مع عقارب الساعة (الى داخل الورقة)

مبدأ العزم

يستخدم في الميكانيك مفهوم مهم جدا يسمى مبدأ العزوم Principle of moments، وينص على أن "عزم القوة حول نقطة يساوي مجموع عزوم مركباتها حول نفس النقطة"



The moment of the force about point O is $M_O = Fd$. But it is easier to find this moment using $M_O = F_x(0) + F_y r = F_y r$.



عزم القوة حول o

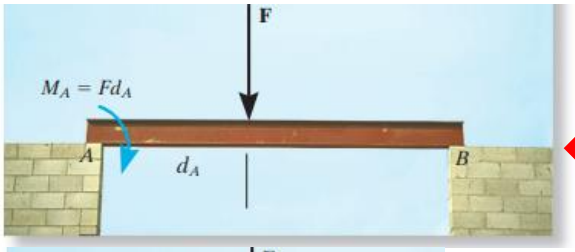
$$M_O = Fd,$$

بتحليل القوة إلى مركباتها المتعامدة:

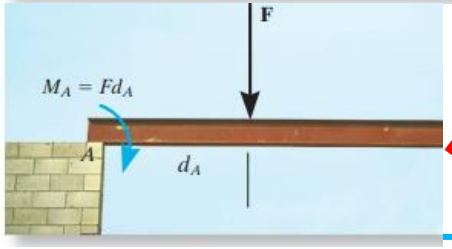
$$M_O = F_x y + F_y x$$

نقاط هامة حول عزم القوة

- عزم القوة يجعل الجسم يدور حول محور يمؤر من نقطة معينة o
- باستخدام قاعدة اليد اليمنى يشار إلى جهة الدوران بحركة الاصابع ويحدد الخنصر جهة العزم (حيث يمثل العزم بشعاع مزدوج الرأس)
- يحدد مقدارعزم القوة F حول النقطة o بالعلاقة $M_O = Fd$، حيث d ذراع القوة وهو المستقيم العمودي او المسافة الاصغر من النقطة o إلى خط تأثير القوة
- يكون غالبا في حالات المستوي (ثنائية الابعاد) استخدام مبدأ العزوم، حيث يكون ايجاد عزوم مركبات القوة أفضل من عزم القوة نفسها

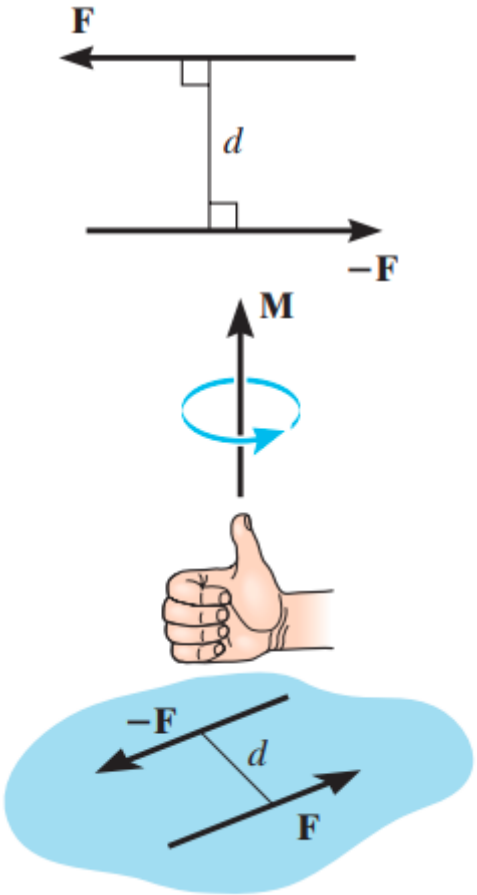


في الشكل: تميل القوة F لتدوير العارضة مع عقارب الساعة حول المسند A بعزم مقداره $M_A = Fd_A$.



سيحدث الدوران الحقيقي اذا تم ازالة المسند في B

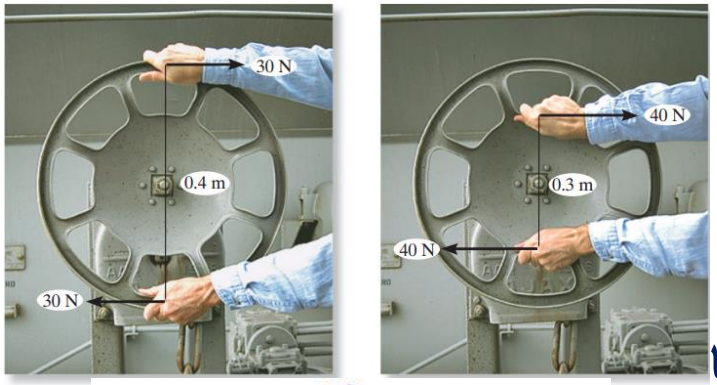
عزم المزدوجة



- تعرف المزدوجة بانها قوتان متوازيتان متساويتان بالقيمة ومختلفتان بالاتجاه يبعدان عن بعضهما بمسافة عمودية d
- من الواضح أن محصلة القوى معدومة، بالتالي ينحصر تأثير المزدوجة بعزم يسبب الدوران.
- يسمى العزم الناتج عنها بعزم المزدوجة.
- يعطى مقدار عزم المزدوجة بالعلاقة $M_O = Fd$
- حيث: F مقدار احدى القوتين، d ذراع العزم او المسافة العمودية بين القوتين.
- يحدد اتجاه ودوران العزم باستخدام قاعدة اليد اليمنى.
- العزم المحصل للمزدوجة هو شعاع يمثل مجموع كل المزدوجات في النظام.

المزدوجات المتكافئة

- اذا انتجت مزدوجتان نفس شدة العزم والاتجاه تعتبران متكافئتين.



- في المثال جانبا: لدينا المزدوجتان تنتجان عزم:

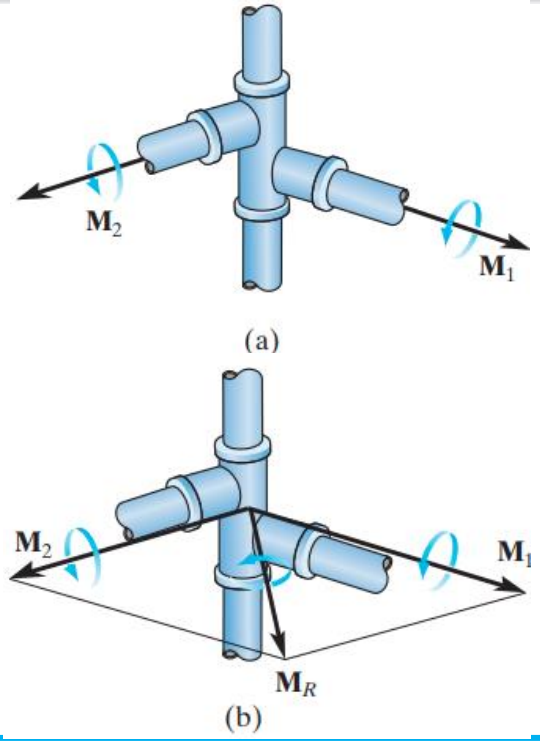
$$M = 30\ N(0.4\ m) = 40\ N(0.3\ m) = 12\ N.m$$

العزم المحصل للمزدوجات

- بما أن المزدوجات هي أشعة حرة، يمكن تحديد محصلاتها عن طريق نقلها الى نقطة ما ثم استخدام مبدأ جمع الأشعة،

مثلا لايجاد العزم المحصل لمزدوجات العزوم M1 ,M2 المؤثرة على الانابيب المبينة جانباً نتبع مايلي:

نحدد نهايات الأشعة في النقطة O، ونجد العزم المحصل:



$$M_R = M_1 + M_2$$

عندما يؤثر على الجسم أكثر من مزدوجتي عزم نعمم المبدأ السابق، وتكون العلاقة كمايلي:

$$M_R = \Sigma r \times F$$

نقاط هامة حول مزدوجات العزوم

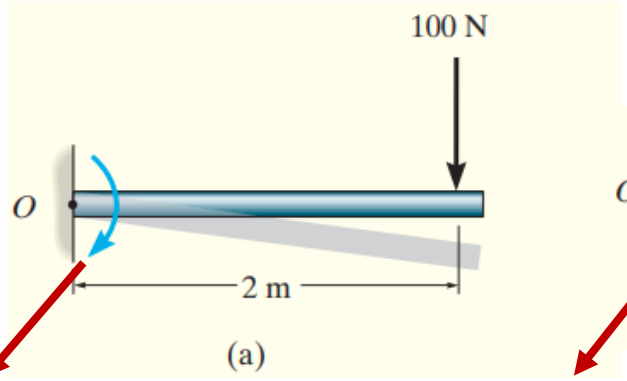
- ينتج عزم المزدوجة عن قوتين متوازيتين متساويتين في القيمة ومختلفتين في الاتجاه. ينتج عن تأثيرها دوران صافي، او سعيها للدوران في اتجاه محدد
- عزم المزدوجة هو شعاع حر، وبالنتيجة يسبب نفس تأثير الدوران على الجسم بغض النظر عن مكان (نقطة) تطبيق المزدوجة على الجسم.
- يمكن تحديد عزم القوتين حول اي نقطة. يمكن اختيار النقطة على خط تأثير احدى القوتين.
- في الفراغ ثلاثي الابعاد يتم تحديد عزم المزدوجة باستخدام الصياغة الشعاعية

$M = r * F$ حيث توجه r من اي نقطة على خط تأثير احدى القوى إلى أي نقطة على خط تأثير القوة الاخرى.

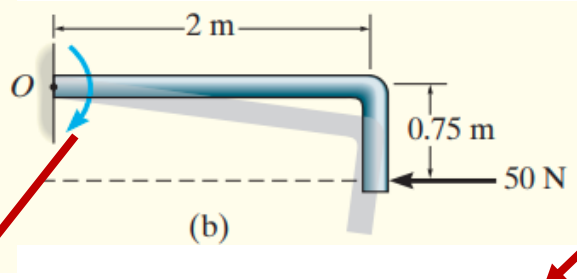
- عزم المزدوجة المحصل هو الشعاع الناتج عن جمع كل مزدوجات العزوم في النظام

مثال 1

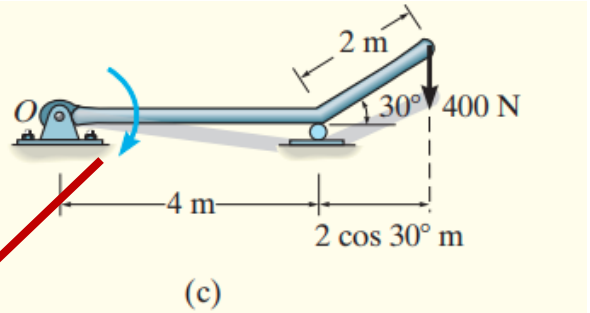
- يطلب حساب العزوم حول النقطة O لكل الحالات المبينة في الأشكال التالية



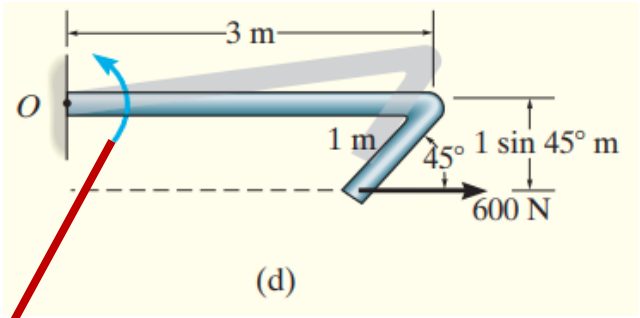
$M_O = (100\ \text{N})(2\ \text{m}) = 200\ \text{N}\cdot\text{m}\ \curvearrowright$



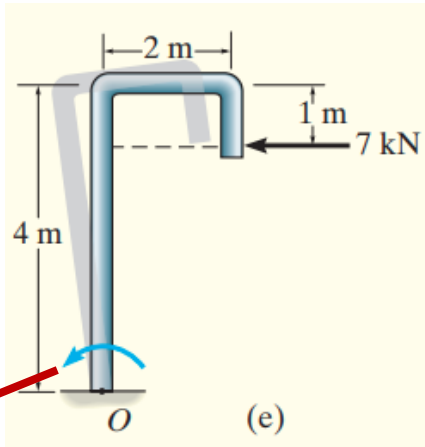
$M_O = (50\ \text{N})(0.75\ \text{m}) = 37.5\ \text{N}\cdot\text{m}\ \curvearrowright$



$M_O = (400\ \text{N})(4\ \text{m} + 2\cos 30°\ \text{m}) = 2.29\ \text{kN}\cdot\text{m}\ \curvearrowright$



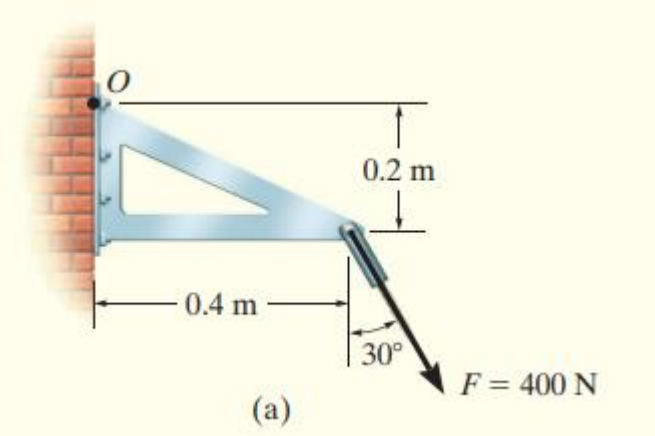
$M_O = (600\ \text{N})(1\sin 45°\ \text{m}) = 424\ \text{N}\cdot\text{m}\ \curvearrowleft$

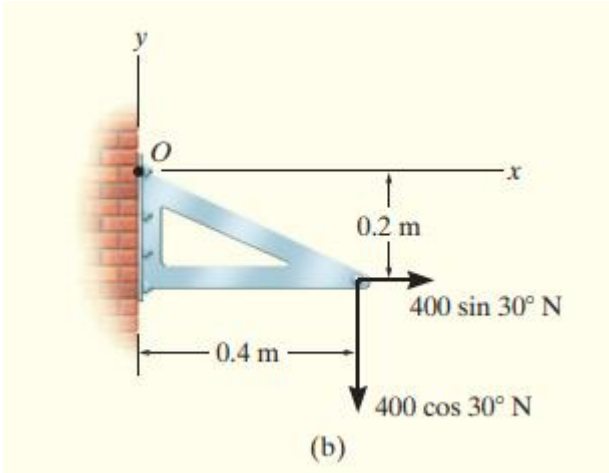


$M_O = (7\ \text{kN})(4\ \text{m} - 1\ \text{m}) = 21.0\ \text{kN}\cdot\text{m}\ \curvearrowleft$

مثال 2

تؤثر القوة F في نهاية الوصلة المبينة في الشكل، يطلب حساب عزم القوة حول النقطة o.



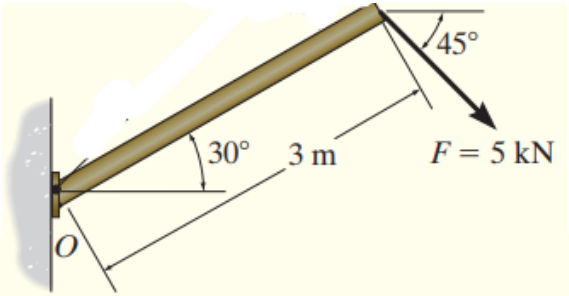


حساب مركبات القوة المتعامدة تحلل القوة الى مركباتها بالنسبة للمحاور x,y

$M_O = 400 \sin 30° (0.2) - 400 \cos 30° (0.4) = -98.6 \text{ N .m}$

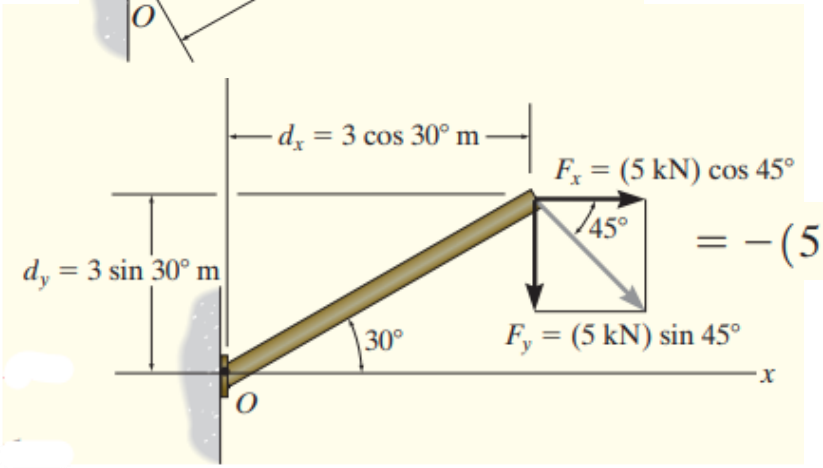
مثال 3

يطلب حساب عزم القوة حول النقطة o.



الحل 3-1

- نوجد المركبات كما هو مبين في الشكل b



- نطبق مبدأ العزوم، يكون لدينا:

$$\circlearrowleft + M_O = -F_x d_y - F_y d_x$$

$$= -(5\cos 45°\text{ kN})(3\sin 30°\text{ m}) - (5\sin 45°\text{ kN})(3\cos 30°\text{ m})$$

$$= -14.5\text{ kN}\cdot\text{m} = 14.5\text{ kN}\cdot\text{m}\ \circlearrowright$$

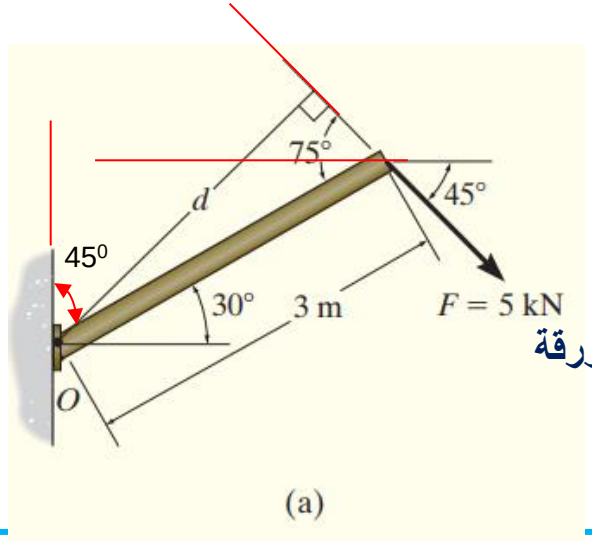
الحل 3-2

من العلاقات المثلثية (الشكل a) نوجد الذراع d

$$d = (3\text{ m})\sin 75° = 2.898\text{ m}$$

نحسب العزم

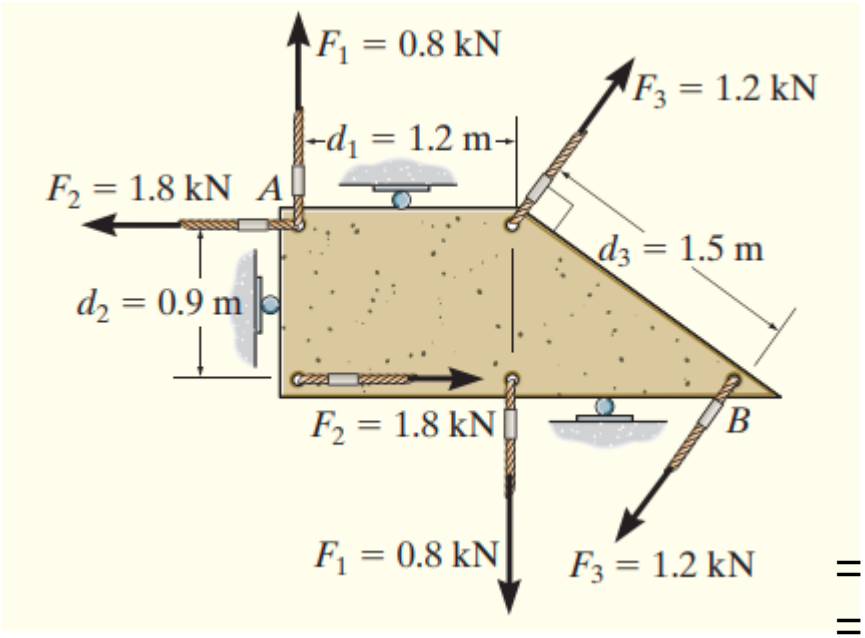
$$M_O = Fd = (5\text{ kN})(2.898\text{ m}) = 14.5\text{ kN}\cdot\text{m}\ \circlearrowright$$



القوة تدور مع عقارب الساعة حول النقطة o، بالتالي يتجه العزم نحو داخل الورقة

مثال 4

يطلب حساب عزم المزدوجة المحصل للمزدوجات المؤثرة على الصفيحة.



الحل:

- يبين الشكل المسافات العمودية بين قوى المزدوجات:

$$d_1 = 1.2\ m,\ d_2 = 0.9\ m,\ and\ d_3 = 1.5\ m.$$

نحسب العزم المحصل من العلاقة، مع اعتبار العزم الموجب يدور عكس عقارب الساعة:

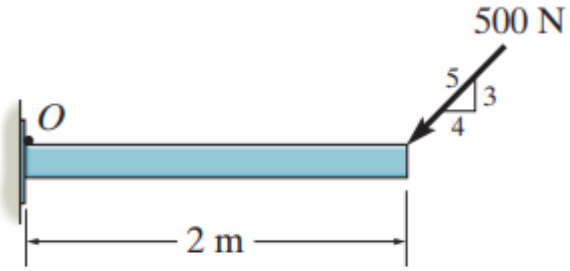
$$\circlearrowleft + M_R = \Sigma M;\ M_R = -F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3$$

$$= -(0.8)(1.2) + (1.8)(0.9) - (1.2)(1.5)$$

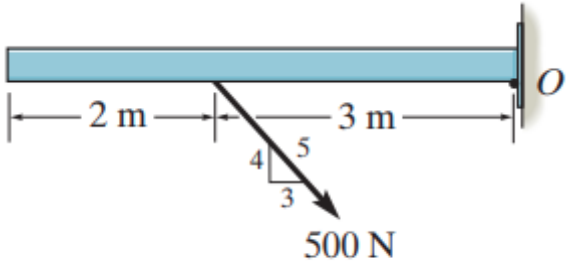
$$= -1.14\ kN \cdot m \circlearrowleft = 1.14\ kN \cdot m \circlearrowright$$

أمثلة للحل

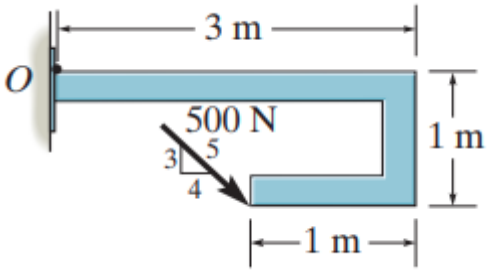
يطلب حساب عزم القوة حول النقطة o. للحالات التالية



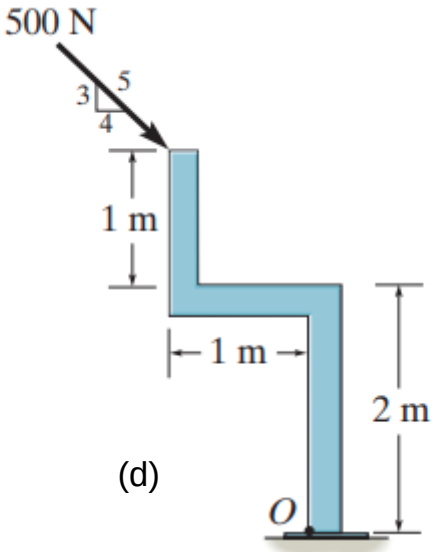
(a)



(b)



(c)



(d)